Γραμμική Άλγεβρα 20/10/15

Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$. Τότε $AB=\begin{bmatrix} \alpha_1 b_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 b_2 \end{bmatrix} = B\cdot A$, γιατί το γινόμενο στο σώμα F είναι μεταθετικό.

Υποθέτουμε $\alpha_1 \neq 0_F$, $\alpha_2 \neq 0_F$. Θέτουμε $B\begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} \end{bmatrix}$. Τότε $AB=I_2=B\cdot A$. Άρα ο A αντιστρέφεται

Πρόταση. Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \alpha_\nu \end{bmatrix} \in F^{\nu\cdot\nu}$ και $\alpha_i \neq 0_F$ για κάθε $i=1,2\ldots\nu$. Τότε ο A αντιστρέφεται και $A^{-1}=\begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & & 0 \\ & \alpha_2^{-1} & \\ 0 & & \alpha_\nu^{-1} \end{bmatrix}$

Πρόταση: Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ 0 & & \alpha_\nu \end{bmatrix} \in F^{\nu\cdot\nu}$ να υπάρχει j με $j \in \{1,2,\ldots\nu\}$ ώστε $\alpha_j = 0_F$. Τότε ο A δεν αντιστρέφεται

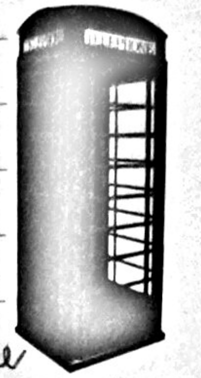
Απόδειξη

-Έστω ότι δεν ισχύει και υπάρχει $B \in F^{\nu\cdot\nu}$ με $AB=BA=I_\nu$. Θα καταλήξουμε σε αντίφαση.

$AB=I_\nu \Rightarrow$ το (j,j) στοιχείο του $AB=(j,j)$-στοιχείο του I_ν που είναι ίσο με 1_F. Αλλά από τον ορισμό του γινομένου πινάκων το (j,j) στοιχείο του AB είναι το γινόμενο της j-γραμμής του A επί τη j-στήλη του B. Αφού $\alpha_j = 0_F$ και A διαγώνιος, όλα τα στοιχεία της j-γραμμής του A είναι 0_F. Άρα το (j,i) στοιχείο του AB είναι $0_F \neq 1_F$ αντίφαση

$$\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x+bz & \alpha y+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}.$$

Ερώτημα: Έστω $A\in F^{\nu\cdot\mu}$. Πότε ορίζεται ο $A\cdot A$;
Φανερά αν και μόνο αν $\nu=\mu$.



Ορισμός

Έστω $A\in F^{\nu\cdot\nu}$. Ορίζουμε για $n\geq 0$ δυνάμεις A^n του A ως εξής:

$A^0=I_\nu$, $A^1=A$, $A^2=A\cdot A$, $A^3=A\cdot A^2$

Με επαγωγή $A^n=A\cdot A^{n-1}$ για κάθε $n\geq 1$

Πρόταση: Με επαγωγή, ισχύει για $n,m\geq 0$ $A^{n+m}=A^n\cdot A^m=A^m\cdot A^n$ και $(A^n)^m=A^{n\cdot m}$

π.χ. Έστω $A\in F^{\nu\cdot\nu}$ αφού $21=4\cdot 5+1$ έχουμε:

$$A^{21}=A^{4\cdot 5+1}=(A^{4\cdot 5})\cdot A=(A^4)^5\cdot A$$

Ορισμός

Έστω $A\in F^{\nu\cdot\nu}$ αντιστρέψιμος. Για $m\in\mathbb{Z}$ με $m<0$ ορίζουμε $A^{-m}=(A^{-1})^m$

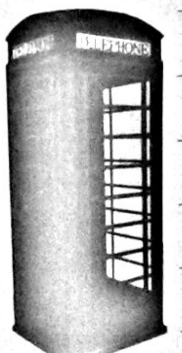
Πρόταση: Αν ο $A\in F^{\nu\cdot\nu}$ αντιστρέφεται, τότε $A^{n+m}=A^{n\cdot m}$ και $(A^n)^m=A^{n\cdot m}$ για κάθε $n,m\in\mathbb{Z}$

π.χ. $A=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}$, τότε $A^2=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^2&0\\0&5^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0\\0&25\end{bmatrix}$

$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^2&0\\0&5^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^3&0\\0&5^3\end{bmatrix}$

Ισχυρισμός: Για κάθε $n\geq 1$ ισχύει $A^n=\begin{bmatrix}3^n&0\\0&5^n\end{bmatrix}$

Απόδειξη: Με επαγωγή στο n. Για $n=1$ ισχύει. Υποθέτουμε $n\geq 2$ και ισχύει για $n-1$ δηλαδή $A^{n-1}=\begin{bmatrix}3^{n-1}&0\\0&5^{n-1}\end{bmatrix}$. Έχουμε $A^n=A\cdot A^{n-1}=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^{n-1}&0\\0&5^{n-1}\end{bmatrix}=$



$\begin{bmatrix}3^n&0\\0&5^n\end{bmatrix}$

Επομένως από αρχή μαθηματικής επαγωγής η πρόταση ισχύει για κάθε $n \geq 1$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Από προηγούμενη πρόταση, αφού A διαγώνιος με όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου $\neq 0_F$, ο A αντιστρέφεται και $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3^{-1} & 0 \\ 0 & 5^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Ισχυρισμός: Αν $n \geq 1$, τότε $A^{-n} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{5})^n \end{bmatrix}$

Απόδειξη: Εξ ορισμού $A^{-n} = (A^{-1})^n = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3}) & 0 \\ 0 & (\frac{1}{5}) \end{bmatrix}$. Η απόδειξη όπως προηγουμένως

Πιο γενικά, έστω $B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ 0 & & \ddots\, b_v \end{bmatrix} \in F^{v \cdot v}$ διαγώνιος. Τότε με επαγωγή* όπως προηγουμένως έχουμε ότι για κάθε $n \geq 1$, $B = \begin{bmatrix} b_1^n & & \\ & b_2^n & \\ 0 & & \ddots\, b_v^n \end{bmatrix}$

Δηλ. $A^n \cdot A^m = A^{n+m} = A^{m \cdot n}$

$(A^n)^m = A^{n \cdot m}$ ισχύουν πάντα όταν $n, m \geq 0$

Ισχύουν και για αρνητικά n, m όταν A αντιστρέψιμος

* στον φυσικό $n \geq 1$

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1 Πράξεις Πινάκων

Άσκηση 1

Έχουμε $2(A-B+3C)=2A-2B+6C$

$3(2A+6B-6C)=6A+18B-18C$

$-4(2A+4B-3C)=-8A-16B+12C$

Προσθέτοντας $0_R A+0_R B+0_R C=0_{m\times n}+0_{m\times n}+0_{m\times n}=0_{m\times n}$

Άσκηση 2

$A\in R^{2\times 4}$, $B\in R^{4\times 2}$, $C\in R^{2\times 2}$

• Άρα ο AB ορίζεται και $AB\in R^{2\times 2}$ με ~~AB=~~

~~AB= 1·1+0·0·0~~ $AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

• Άρα ο $B\cdot A$ ορίζεται και $B\cdot A\in R^{4\times 4}$ με

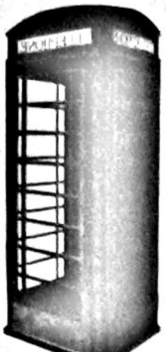
$BA=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

• Άρα ο $B\cdot C$ ορίζεται και $B\cdot C\in R^{4\times 2}$ και $BC=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\\2&2\\2&2\end{pmatrix}$

• Αφού $C\in R^{2\times 2}$ και $B\in R^{4\times 2}$ ο αριθμός στηλών του $C\neq$ αριθμό ~~γραμμών~~ γραμμών του B επομένως ο $C\cdot B$ δεν ορίζεται

Αφού ο πολλαπλασιασμός πινάκων (όταν ορίζεται) είναι προσεταιριστική δηλαδή $A(B\cdot C)=(AB)\cdot C$, αν το ABC ορίζεται δεν χρειάζεται παρενθέσεις και ισχύει $ABC=(AB)\cdot C=A\cdot B\cdot C$

Πράγματι αφού $A\in R^{2\times 4}$, $B\in R^{4\times 2}$, $C\in R^{2\times 2}$ έχουμε AB ορίζεται και $AB\in R^{2\times 2}$ άρα και το $(AB)\cdot C$ ορίζεται και είναι πίνακας 2×2. Μετά τις πράξεις το βρίσκουμε



Άσκηση 3

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^{2\times 2}$, άρα $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 1(-1)+(-1)\cdot 0\\ 0\cdot 1+0\cdot 0 & 0(-1)+0\cdot 0\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\ \alpha&0&0\\ b&c&0\end{pmatrix}$ είναι κάτω τριγωνικός

$B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\ a&0&0\\ b&c&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\ \alpha&0&0\\ b&c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ c\cdot\alpha&0&0\end{pmatrix}$

άρα $B^3=B\cdot B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\ \alpha&0&0\\ b&c&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ c\alpha&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}=\mathbb{O}_{3\times 3}$

Για να δείξουμε ότι C αντιστρέφεται* (και $C^{-1}=\underset{B}{C}$)
αρκεί να δείξουμε ότι $C\cdot B=I_2=B\cdot C$ ισοδύναμα
$C\cdot C=I_2=C\cdot C$, ισοδύναμα ότι $C^2=I_2$

με αντίστροφο B
Έχουμε $C^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

άρα ο C αντιστρέφεται και ο αντίστροφος είναι ο πίνακας $B=C$
Με άλλα λόγια, αν $C\in F^{\nu\times\nu}$ τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
i) Ο C αντιστρέφεται με αντίστροφο τον πίνακα C
ii) $C^2=I_\nu$
Απόδειξη: Άμεση από τον ορισμό αντιστρέψιμου τετραγωνικού πίνακα

Άσκηση 4

Υπενθύμιση: Έστω $C=\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d\end{pmatrix} \in F^{2\times 2}$. Τότε ο C αντιστρέφεται αν και μόνο αν $k \neq 0_F$, όπου $k=\alpha d-bc$ και αν αντιστρέφεται, ο αντίστροφος του C είναι ίσος με $\begin{pmatrix} \frac{d}{k} & -\frac{b}{k} \\ -\frac{c}{k} & -\frac{\alpha}{k}\end{pmatrix}$. Επομένως για τον A έχουμε $k=1\cdot 1-(-2)2=5\neq 0_R$

άρα ο A αντιστρέφεται και $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

Έχουμε $A\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1\end{pmatrix}$. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά την ισότητα με A^{-1} έχουμε $A^{-1}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right)=A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$(A^{-1}A)\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1\end{pmatrix} \Rightarrow I_2\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1\end{pmatrix}$

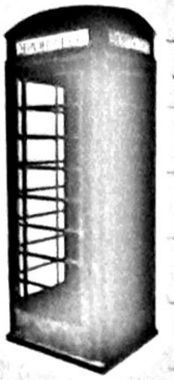
$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ Άρα $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$

Άσκηση 5

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in R^{2\times 2}$. Έστω $B=\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d\end{pmatrix}\in R^{2\times 2}$. Τότε ο B μετατίθεται με τον A $\Leftrightarrow AB=BA \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha+c & b+d \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha+b \\ c & c+d\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+c=\alpha \\ b+d=\alpha+b \\ c=c \\ d=c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ \alpha=d \end{cases}$ Άρα $B=\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ με $\alpha, b\in R$



Άσκηση 6

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=(A^2)^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

$2015=2012+3=503\cdot 4+3$

Άρα από ιδιότητες δυνάμεων πινάκων

$$A^{2015}=A^{4\cdot 503+3}=A^{4\cdot 503}\cdot A^3=(A^4)^{503}\cdot A^3=(I_3)^{503}\cdot A^3=I_3\cdot A^3=A^3=$$

$$A\cdot A^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ldots$$

Παρατήρηση: Δείξαμε $A^4=I_3 \Rightarrow A\cdot A^3=A^3\cdot A=I_3$ άρα από τον ορισμό του αντιστρόφου ο A είναι αντιστρέψιμος και με αντίστροφο τον πίνακα $A^3=\ldots$

Άσκηση 7

Έχουμε $A^4-A^3+A^2-A+I_n=O_{n\times n} \Rightarrow I_n=-A^4+A^3-A^2+A$ (1)

Έχουμε $-A^4+A^3-A^2+A=A(-A^3+A^2-A+I_n)=(-A^3+A^2-A+I_n)A$ (2)

Από 1) και 2) έπεται A αντιστρέψιμος και
$A^{-1}=-A^3+A^2-A+I_n$

Η $A^4-A^3+A^2-A+I_n=O_{n\times n}$ δίνει ότι $-A^4=-A^3+A^2-A+I_n$ και άρα $A^{-1}=-A^4$

Άσκηση 9

Έχουμε $(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B]=A^{-1}A(A+B)^{-1}\cdot B+B^{-1}\cdot A(A+B)^{-1}\cdot B=$
$(A+B)^{-1}\cdot B+B^{-1}\cdot A(A+B)^{-1}B=B^{-1}B(A+B)^{-1}\cdot B+B^{-1}\cdot A(A+B)^{-1}\cdot B=$
$B^{-1}(B(A+B)^{-1}+A(A+B)^{-1}B)=B^{-1}(B(A+B)^{-1}+A(A+B)^{-1})B=$
$B^{-1}(A+B)^{-1}(A+B)\cdot B=B^{-1}I_nB=B^{-1}\cdot B=I_n$

Παρόμοια δείχνουμε $[A(A+B)^{-1}B](A^{-1}+B^{-1})=I_n$
και το αποτέλεσμα έπεται